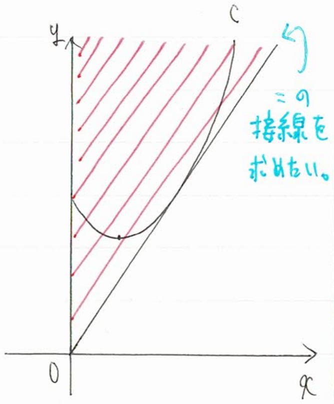
2020年　東大数学　文系第3問 ①

(1) 解法1　図形的に考える。

PがC上を動き、半直線OPの通る領域を求めるので、右図のような領域になるはず。

⇒ 領域の右端の接線を求めたい。



$y=mx$ と $y=x^2-2x+4$ を連立して、

$mx=x^2-2x+4$

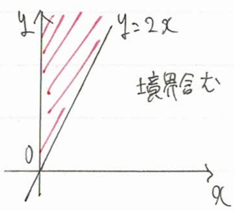
$\Leftrightarrow x^2-(m+2)x+4=0$

(判別式) $=(m+2)^2-4\times1\times4=0$

$m^2+4m-12=0$　$m=-6,\ 2$

図から、明らかに $m>0$ なので、$m=2$.

よって、求める領域は、y軸と $y=2x$ の間の領域になり、右のよう。



解法2　大筋は、解法1と同じ。接線の求め方を変えた。

$y=f(x)=x^2-2x+4$ とすると、$y'=f'(x)=2x-2$ で、$(t,\ f(t))$ での接線は、

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$\Leftrightarrow\ y=(2t-2)x-t^2+4$

これが原点を通るので、

$0=0-t^2+4$　　$t=\pm2$

放物線Cは $x\geqq0$ の領域にしかないので、$t>0$

$\therefore\ t=2$

接線は、$y=(2\times2-2)x-2^2+4$

$\therefore\ y=2x$　　(以下略)

解法3　解の配置を利用

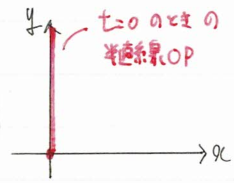
C上の点Pのx座標をtとすると、$P(t,\ t^2-2t+4)$

すると、半直線OPは、

$$y=\frac{t^2-2t+4}{t}x \quad (x>0,\ y>0,\ t>0)$$ ①

と表せる。

(但し、$t=0$ のとき、右図のように、半直線OPは、$x=0\ (y\geqq0)$ を表すので、①は $t>0,\ x>0,\ y>0$ に限ってよい。)



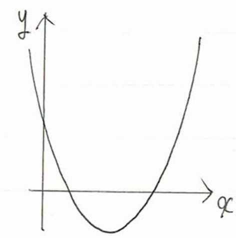
パラメータで整理して、解の配置

① $\Leftrightarrow\ xt^2-(2x+y)t+4x=0$

左辺をtの2次方程式とみなしたものを $g(t)$ とすると、

$g(t)=0$ が $t>0$ に少なくとも1つ解を持てばよい。

※ $x>0$ なので、$g(t)$ は2次方程式で、$y=g(t)$ は、下に凸の放物線である。



(i) $g(t)=0$ が $t>0$ に2解を持つとき (重解許す)

① (判別式) $\geqq0$ より

$(2x+y)^2-4\times x\times4x\geqq0$

$(y-2x)(y+6x)\geqq0$

$y>0$ かつ $x>0$ より $y+6x>0$ なので、

$y-2x\geqq0$　　$\therefore\ y\geqq2x$

② 軸 >0 より

$g(t)=x\left(t-\frac{2x+y}{2x}\right)^2-\frac{(2x+y)^2}{4x}+4x$ から、

軸 $=\frac{2x+y}{2x}>0$

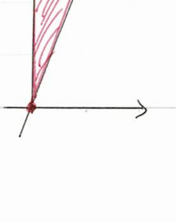
これは、すべての $x>0,\ y>0$ で成立する。

③ $g(0)>0$ より

$4x>0$　　これも、すべての $x>0$ で成立する。

①かつ②かつ③より、

求める領域は、$\begin{cases} x>0 \text{ かつ } y>0 \text{ かつ } y\geqq2x \\ \text{または} \\ x=0 \text{ かつ } y\geqq0 \end{cases}$



2020年　東大数学　文系第3問 ②

解法④ ファクシミリ論法を利用

解法③ の ①の式 より

$$y=\frac{t^2-2t+4}{t}x \qquad (t>0,\ x>0,\ y>0)$$

右辺を パラメータで 整理して.
(x は 固定)
y の 最大・最小 (とりうる範囲) をもとめる。

$\dfrac{t^2-2t+4}{t}=t+\dfrac{4}{t}-2$ とすると. $(t>0)$

相加平均 相乗平均 の 関係 から.

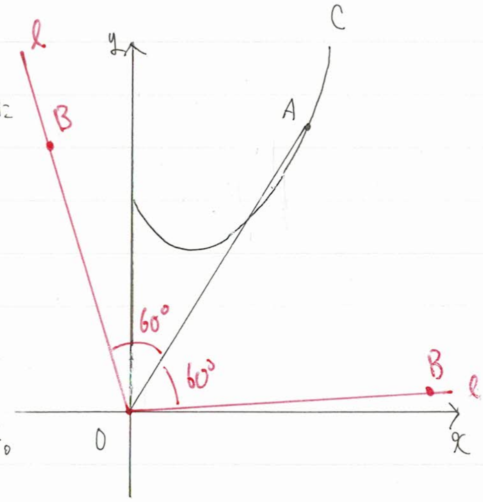
$$t+\frac{4}{t}-2\geqq 2\sqrt{t\times\frac{4}{t}}-2=2$$ なので.

① $\Leftrightarrow$ $y=\dfrac{t^2-2t+4}{t}x$

$y\geqq 2x$

以上 より, 求める領域になる。

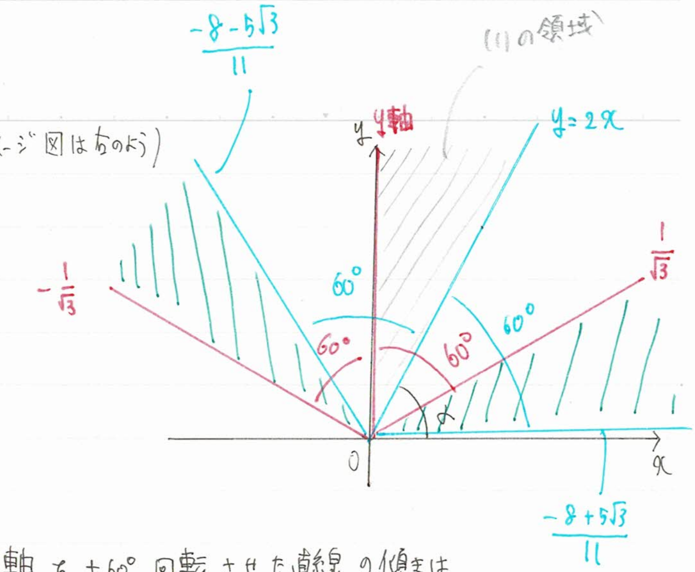
(2)
例えば, 右の 場所に
点Aが あった時、
lは, 赤線 の 場所に
とり、
点Bを, OA=OBとなる
ように とれば,
正三角形 OABが 作れる。



このように, 点Aが C上の どこにあっても、
lは OA との角度が 60° に なるように とれば.
必ず △OABが 正三角形 に なるように 点Bが とれる。

点Aが C上を 動くとき, 半直線OA は, (1)の 結論の 領域を
動くので, y軸 と $y=2x$ ((1)の領域の 境界) を 60°
回転させた 直線の 傾きを 求めれば よい。

(イメージ図は右のよう)



y軸 を ±60° 回転させた直線 の 傾きは,
x軸 から. 30°, 150° の 角度なので.
傾きは. $\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 　$\tan 150^\circ=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

$y=2x$ を ±60° 回転させた 直線 の 傾きを 求める。
$y=2x$ と x軸 が なす 角 を α と すると. $\tan\alpha=2$ であり,
求める 傾きは. $\tan(\alpha-60^\circ)$ と $\tan(\alpha+60^\circ)$ である。

$$\tan(\alpha-60^\circ)=\frac{\tan\alpha-\tan 60^\circ}{1+\tan\alpha\times\tan 60^\circ}=\frac{2-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}=\frac{-8+5\sqrt{3}}{11}$$

$$\tan(\alpha+60^\circ)=\frac{\tan\alpha+\tan 60^\circ}{1-\tan\alpha\tan 60^\circ}=\frac{2+\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}=\frac{-8-5\sqrt{3}}{11}$$

以上 より, 求める a の 範囲は,

$$\frac{-8-5\sqrt{3}}{11}\leqq a\leqq-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{または} \quad \frac{-8+5\sqrt{3}}{11}\leqq a\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}$$

//